

ARTICLE

Supplementary Material

Supplementary Table I. Fields, projections and observed flow directions for 2:3:4.

$f(4\Box s)$	$f(6\Box s)$	$f(8\Box s)$	$L_{2,3}$	$L_{3,4}$	$L_{2,4}$	flow
Sin	Sin	Sin	+C _d	+C _d	+C _d	CCW
-S	S	-S	-C _d	-C _d	-C _d	“
S	-S	S	+C _d	+C _d	+C _d	“
-S	-S	-S	-C _d	-C _d	-C _d	“
Sin	-Cos	-Sin	-C _d	-C _d	-C _d	“
-S	-C	S	+C _d	+C _d	+C _d	“
S	C	-S	-C _d	-C _d	-C _d	“
-S	C	S	+C _d	+C _d	+C _d	“
Sin	Sin	-Sin	+C _d	-C _d	-C _d	CW
-S	S	S	-C _d	+C _d	+C _d	“
S	-S	-S	+C _d	-C _d	-C _d	“
-S	-S	S	-C _d	+C _d	+C _d	“
Sin	-Cos	Sin	-C _d	+C _d	+C _d	“
-S	-C	-S	+C _d	-C _d	-C _d	“
S	C	S	-C _d	+C _d	+C _d	“
-S	C	-S	+C _d	-C _d	-C _d	“
Cos	Cos	Cos	+O	-O	-O	CCW
-C	C	-C	-O	+O	+O	“
C	-C	C	+O	-O	-O	“
-C	-C	-C	-O	+O	+O	“
Cos	-Sin	-Cos	-O	+O	+O	“
-C	-S	C	+O	-O	-O	“
C	S	-C	-O	+O	+O	“
-C	S	C	+O	-O	-O	“
Cos	Cos	-Cos	+O	+O	+O	CW
-C	C	C	-O	-O	-O	“
C	-C	-C	+O	+O	+O	“
-C	-C	C	-O	-O	-O	“
Cos	-Sin	Cos	-O	-O	-O	“
-C	-S	-C	+O	+O	+O	“
C	S	C	-O	-O	-O	“
-C	S	-C	+O	+O	+O	“
Sin	Cos	-Cos	-C _d	+O	-O	CCW
-S	C	C	+C _d	-O	+O	“
S	-C	-C	-C _d	+O	-O	“
-S	-C	C	+C _d	-O	+O	“
Sin	-Sin	Cos	+C _d	-O	+O	“
-S	-S	-C	-C _d	+O	-O	“
S	S	C	+C _d	-O	+O	“
-S	S	-C	-C _d	+O	-O	“

Sin	Cos	Cos	-C _d	-O	+O	CW
-S	C	-C	+C _d	+O	-O	“
S	-C	C	-C _d	-O	+O	“
-S	-C	-C	+C _d	+O	-O	“
Sin	Sin	-Cos	+C _d	+O	-O	“
-S	-S	C	-C _d	-O	+O	“
S	-S	-C	+C _d	+O	-O	“
-S	S	C	-C _d	-O	+O	“
Cos	Cos	-Sin	+O	-C _d	+C _d	CCW
-C	C	S	-O	+C _d	-C _d	“
C	-C	-S	+O	-C _d	+C _d	“
-C	-C	S	-O	+C _d	-C _d	“
Cos	-Sin	Sin	-O	+C _d	-C _d	“
-C	-S	-S	+O	-C _d	+C _d	“
C	S	S	-O	+C _d	-C _d	“
-C	S	-S	+O	-C _d	+C _d	“
Cos	Cos	Sin	+O	+C _d	-C _d	CW
-C	C	-S	-O	-C _d	+C _d	“
C	-C	S	+O	+C _d	-C _d	“
-C	-C	-S	-O	-C _d	+C _d	“
Cos	-Sin	-Sin	-O	-C _d	+C _d	“
-C	-S	S	+O	+C _d	-C _d	“
C	S	-S	-O	-C _d	+C _d	“
-C	S	S	+O	+C _d	-C _d	“

Supplementary Table II. Fields, projections and observed flow directions for 1:2:6.

$f(2 \square s)$	$f(4 \square s)$	$f(12 \square s)$	$L_{1,2}$	$L_{2,6}$	$L_{1,6}$	flow
Sin	Sin	Sin	+Cd	+O	+Cd	CW
S	-S	-S	-Cd	+O	-Cd	“
-S	S	S	+Cd	+O	+Cd	“
-S	-S	-S	-Cd	+O	-Cd	“
Cos	Sin	Sin	-Cd	+O	-Cd	“
C	-S	-S	+Cd	+O	+Cd	“
-C	S	S	-Cd	+O	-Cd	“
-C	-S	-S	+Cd	+O	+Cd	“
Sin	Sin	-Sin	+Cd	-O	-Cd	CCW
S	-S	S	-Cd	-O	+Cd	“
-S	S	-S	+Cd	-O	-Cd	“
-S	-S	S	-Cd	-O	+Cd	“
Cos	Sin	-Sin	-Cd	-O	+Cd	“
C	-S	S	+Cd	-O	-Cd	“
-C	S	-S	-Cd	-O	+Cd	“
-C	-S	S	+Cd	-O	-Cd	“
Sin	Cos	Cos	+O	-O	+O	CCW
S	-C	-C	-O	-O	-O	“
-S	C	C	+O	-O	+O	“
-S	-C	-C	-O	-O	-O	“
Cos	Cos	Cos	-O	-O	-O	“
C	-C	-C	+O	-O	+O	“
-C	C	C	-O	-O	-O	“
-C	-C	-C	+O	-O	+O	“
Sin	Cos	-Cos	+O	+O	-O	CW
S	-C	C	-O	+O	+O	“
-S	C	-C	+O	+O	-O	“
-S	-C	C	-O	+O	+O	“
Cos	Cos	-Cos	-O	+O	+O	“
C	-C	C	+O	+O	-O	“
-C	C	-C	-O	+O	+O	“
-C	-C	C	+O	+O	-O	“
Sin	Sin	-Cos	+Cd	+Cd	-O	CCW
S	-S	C	-Cd	+Cd	+O	“
-S	S	-C	+Cd	+Cd	-O	“
-S	-S	C	-Cd	+Cd	+O	“
Cos	Sin	-Cos	-Cd	+Cd	+O	“
C	-S	C	+Cd	+Cd	-O	“
-C	S	-C	-Cd	+Cd	+O	“
-C	-S	C	+Cd	+Cd	-O	“
Sin	Sin	Cos	+Cd	-Cd	+O	CW
S	-S	-C	-Cd	-Cd	-O	“
-S	S	C	+Cd	-Cd	+O	“
-S	-S	-C	-Cd	-Cd	-O	“
Cos	Sin	Cos	-Cd	-Cd	-O	“
C	-S	-C	+Cd	-Cd	+O	“
-C	S	C	-Cd	-Cd	-O	“

-C	-S	-C	+Cd	-Cd	+O	“
Sin	Cos	-Sin	+O	+Cd	-Cd	CCW
S	-C	S	-O	+Cd	+Cd	“
-S	C	-S	+O	+Cd	-Cd	“
-S	-C	S	-O	+Cd	+Cd	“
Cos	Cos	-Sin	-O	+Cd	+Cd	“
C	-C	S	+O	+Cd	-Cd	“
-C	C	-S	-O	+Cd	+Cd	“
-C	-C	S	+O	+Cd	-Cd	“
Sin	Cos	Sin	+O	-Cd	+Cd	CW
S	-C	-S	-O	-Cd	-Cd	“
-S	C	S	+O	-Cd	+Cd	“
-S	-C	-S	-O	-Cd	-Cd	“
Cos	Cos	Sin	-O	-Cd	-Cd	“
C	-C	-S	+O	-Cd	+Cd	“
-C	C	S	-O	-Cd	-Cd	“
-C	-C	-S	+O	-Cd	+Cd	“

Supplementary Table III. Projections for the rational triad 1:2:3. An “S” in the column labeled “2” indicates $\sin(2\omega t)$, etc.

1	3	5	L _{1,3}	L _{3,5}	L ₁₅
Sin	Sin	Sin	+O	+O	+O
S	S	C	+O	+C _d	-C _d
S	S	-S	+O	-O	-O
S	S	-C	+O	-C _d	+C _d
Sin	Cos	Sin	-C _d	+C _d	+O
S	C	C	-C _d	-O	-C _d
S	C	-S	-C _d	-C _d	-O
S	C	-C	-C _d	+O	+C _d
Sin	-Sin	Sin	-O	-O	+O
S	-S	C	-O	-C _d	-C _d
S	-S	-S	-O	+O	-O
S	-S	-C	-O	+C _d	+C _d
Sin	-Cos	Sin	+C _d	-C _d	+O
S	-C	C	+C _d	+O	-C _d
S	-C	-S	+C _d	+C _d	-O
S	-C	-C	+C _d	-O	+C _d
Cos	Sin	Sin	-C _d	+O	+C _d
C	S	C	-C _d	+C _d	+O
C	S	-S	-C _d	-O	-C _d
C	S	-C	-C _d	-C _d	-O
Cos	Cos	Sin	-O	+C _d	+C _d
C	C	C	-O	-O	+O
C	C	-S	-O	-C _d	-C _d
C	C	-C	-O	+O	-O
Cos	-Sin	Sin	+C _d	-O	+C _d
C	-S	C	+C _d	-C _d	+O
C	-S	-S	+C _d	+O	-C _d
C	-S	-C	+C _d	+C _d	-O
Cos	-Cos	Sin	+O	-C _d	+C _d
C	-C	C	+O	+O	+O
C	-C	-S	+O	+C _d	-C _d
C	-C	-C	+O	-O	-O
-Sin	Sin	Sin	-O	+O	-O
-S	S	C	-O	+C _d	+C _d
-S	S	-S	-O	-O	+O
-S	S	-C	-O	-C _d	-C _d
-Sin	Cos	Sin	+C _d	+C _d	-O
-S	C	C	+C _d	-O	+C _d
-S	C	-S	+C _d	-C _d	+O
-S	C	-C	+C _d	+O	-C _d
-Sin	-Sin	Sin	+O	-O	-O
-S	-S	C	+O	-C _d	+C _d
-S	-S	-S	+O	+O	+O
-S	-S	-C	+O	+C _d	-C _d
-Sin	-Cos	Sin	-C _d	-C _d	-O
-S	-C	C	-C _d	+O	+C _d
-S	-C	-S	-C _d	+C _d	+O
-S	-C	-C	-C _d	-O	-C _d
-Cos	Sin	Sin	+C _d	+O	-C _d
-C	S	C	+C _d	+C _d	-O

-C	S	-S	+C _d	-O	+C _d
-C	S	-C	+C _d	-C _d	+O
-Cos	Cos	Sin	+O	+C _d	-C _d
-C	C	C	+O	-O	-O
-C	C	-S	+O	-C _d	+C _d
-C	C	-C	+O	+O	+O
-Cos	-Sin	Sin	-C _d	-O	-C _d
-C	-S	C	-C _d	-C _d	-O
-C	-S	-S	-C _d	+O	+C _d
-C	-S	-C	-C _d	+C _d	+O
-Cos	-Cos	Sin	-O	-C _d	-C _d
-C	-C	C	-O	+O	-O
-C	-C	-S	-O	+C _d	+C _d
-C	-C	-C	-O	-O	+O